SYSTEME LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

o.Univ.-Prof.Mag.Dr.S. Großer

A. Problemstellungen

Zum Zwecke der Motivation der nachfolgenden theoretischen Betrachtungen gehen wir von 4 konkreten Problemen aus, die den folgenden Gebieten entstammen: Netzwerktechnik, Mechanik, Medizin, Friedensforschung. Die Reihenfolge ist durch die Komplexität der Problemstellung - bwz. der Lösungsmethode bedingt.

EX I (Elektrisches Netzwerk)

Man ermittle die Ströme, die in dem unten abgebildeten elektrischen Netzwerk fließen, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ kein Strom fließt.

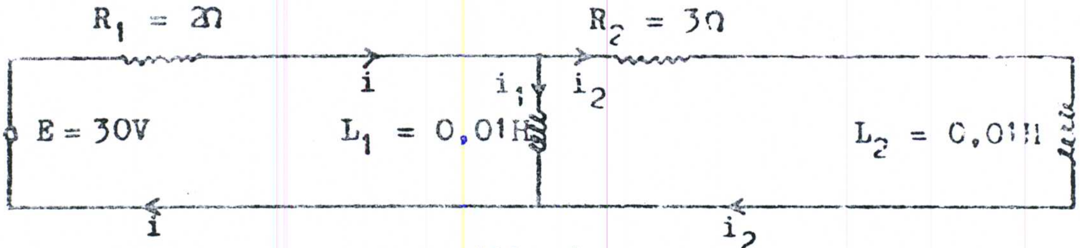


Abb. 1

Nach den Kirchhoff'schen Gesetzen gelten die Gleichungen

$$2i + 0{,}01\,\frac{di_1}{dt} = 30 \quad \text{und} \quad 2i + 3i_2 + 0{,}01\,\frac{di_2}{dt} = 30.$$

wobei $i = i_1 + i_2$.

Nach Substitution erhält man das System von linearen Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} 0{,}01\,\frac{di_1}{dt} + 2i_1 + 2i_2 &= 30 \\ 0{,}01\,\frac{di_2}{dt} + 2i_1 + 5i_2 &= 30 \end{aligned}\right\}, \quad \text{wo } i_1(0) = i_2(0) = 0.$$

Setzt man $i_1 = x_1$, $i_2 = x_2$, so hat man in obiger Schreibweise das System

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -200x_1(t) - 200x_2(t) + 3000 \\ \dot{x}_2(t) &= -200x_1(t) - 500x_2(t) + 3000 \end{aligned}\right\}, \quad \text{wo } x_1(0) = x_2(0) = 0$$

In Vektorschreibweise

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 & -200 \\ -200 & -500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

Wir schreiben abkürzend: $\dot{X} = AX + F$, wobei $A = \begin{bmatrix} -200 & -200 \\ -200 & -500 \end{bmatrix}$ und $F = \begin{bmatrix} 3000 \\ 3000 \end{bmatrix}$

EX II (Mechanisches System mit Rückkoppelung)

Es werde ein einfaches mechanisches System nach der Abbildung 2 betrachtet, in dem zwei auf geradliniger Bahn befindliche Massen m_1, m_2 (kleine Auslenkungen y_1, y_2) durch eine Feder verbunden und außerdem geschwindigkeitsproportionale Dämpfungen vorhanden sind.

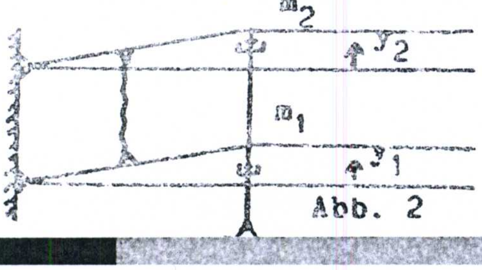


Abb. 2

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1\,\ddot{y}_1 = d(y_2 - y_1) - k_1\dot{y}_1 + k_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$
$$m_2\,\ddot{y}_2 = d(y_1 - y_2) \qquad + k_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2),$$

wobei d der Federkonstante proportional ist.

Setzt man der Einfachheit halber $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$, $\frac{d}{m_1} = \frac{k_1}{m_1} = 1$, so folgt für den Vektor X mit den Komponenten

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$ das System von Differentialgleichungen erster Ordnung $\dot{X} = AX$ mit der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

<u>EX III</u> (<u>Modell für die Diagnose von Zuckerkrankheit</u>)

Es wird dabei der sogenannte Glukose-Toleranz-Test angewandt: zu diesem Test kommt der Patient nüchtern ins Spital und bekommt eine große Dosis von Glukose (von Zucker in jener Form, in welcher er gewöhnlich im Blutstrom aufscheint). Während der nächsten 3 bis 5 Stunden werden verschiedene Messungen der Glukose-Konzentration im Blut des Patienten vorgenommen, und diese Messungen werden zur Diagnose der Zuckerkrankheit verwendet.

Es sei G die Konzentration der Glukose im Blut und H die reine Hormonkonzentration. Jene Hormone, wie zum Beispiel Insulin, welche die Glukose-Konzentration senken, sollen H anheben; jene Hormone, wie zum Beispiel Cortison, welche die Glukose-Konzentration anheben, sollen H senken.

Dieses Basis-Modell kann nun analytisch wie folgt beschrieben werden:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= F_1(G,H) + I(t) \\ \frac{dH}{dt} &= F_2(G,H) \end{aligned}\right\},$$

wobei F_1, F_2 Funktionen von G und H sind, $I(t)$ der externe Anteil, in welchem die Glukose-Konzentration erhöht wird. Man setzt nun voraus, daß G und H optimale Werte G_o und H_o angenommen haben zur Zeit, als der nüchterne Patient im Spital erschienen ist. Das heißt

$$F_1(G_o,H_o = 0 \text{ und } F_2(G_o,H_o) = 0.$$

Wir sind an der Abweichung von G und H von ihren optimalen Werten interessiert, daher substituieren wir:

$$g = G - G_o, \quad h = H - H_o.$$

Dann lauten die Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= F_1(G_o+g, H_o+h) + I(t) \\ \frac{dh}{dt} &= F_2(G_o+g, H_o+h) \end{aligned}\right\},$$

Wir entwickeln nun F_1 und F_2 in Taylorreihen:

$$F_1(G_o+g, H_o+h) = F_1(G_o,H_o) + \frac{\partial F_1(G_o,H_o)}{\partial G} g + \frac{\partial F_1(G_o,H_o)}{\partial H} h + e_1,$$

$$F_2(G_o+g, H_o+h) = F_2(G_o,H_o) + \frac{\partial F_2(G_o,H_o)}{\partial G} g + \frac{\partial F_2(G_o,H_o)}{\partial H} h + e_2,$$

wobei die Terme e_1 und e_2 sehr klein sind im Vergleich zu g und h.

Setzt man daher voraus, daß G und H nur schwach von G_o und H_o abweichen (wir ignorieren also e_1 und e_2), dann erhält man:

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial F_1(G_o,H_o)}{\partial G} g + \dfrac{\partial F_1(G_o,H_o)}{\partial H} h + I(t) \\ \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial F_2(G_o,H_o)}{\partial G} g + \dfrac{\partial F_2(G_o,H_o)}{\partial H} h \end{cases}.$$

Man kann nun die Vorzeichen der auftretenden partiellen Ableitungen bestimmen und erhält:

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + I(t) \\ \dfrac{dh}{dt} = -m_3 h + m_4 g \end{cases}, \text{ wobei } m_1, m_2, m_3, m_4 \text{ positive Konstanten sind.}$$

Setzt man $g = x_1$, $h = x_2$, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$ Wir setzen $A = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 \end{bmatrix}$ und

erhalten $\dot{X} = AX + F$, wo $F(t) = \begin{bmatrix} I(t) \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>EX IV</u> (<u>Modell zur Friedensforschung</u>)

Es seien 3 Nationen gegeben. Mit $x_1(t)$ werde das Kriegspotential der ersten Nation, mit $x_2(t)$ das der zweiten und mit $x_3(t)$ das der dritten bezeichnet. Die Veränderungsrate von $x_1(t)$ hängt offenbar von der Kriegsbereitschaft $x_2(t)$, $x_3(t)$ der beiden anderen Nationen ab und von den Beziehungen zwischen der ersten und der zweiten bzw. zwischen der ersten und der dritten Nation. Im einfachsten Fall wollen wir diese Terme durch $k\,x_2(t)$, $k\,x_3(t)$ bzw. durch g_1 darstellen, wobei k und g positive Konstanten sind. Andererseits werden zum Beispiel die Kosten der Bewaffnung einen unterdrückenden Effekt auf $\frac{dx_1}{dt}$ haben; wir stellen diese Term durch $-\alpha\,x_1(t)$ dar, wobei α eine positive Konstante ist. Eine ähnliche Analyse gilt für die beiden anderen Nationen. Setzen wir voraus, daß jede Nation denselben "Bereitschaftskoeffizienten" k und denselben "Kriegsunterdrückungskoeffizienten" α besitzt, dann erhalten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha\,x_1(t) + k\,x_2(t) + k\,x_3(t) + g_1 \\ \dot{x}_2(t) &= k\,x_1(t) - \alpha\,x_2(t) + k\,x_3(t) + g_2 \\ \dot{x}_3(t) &= k\,x_1(t) + k\,x_2(t) - \alpha\,x_3(t) + g_3. \end{aligned}$$

Setzt man $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -\alpha & k & k \\ k & -\alpha & k \\ k & k & -\alpha \end{bmatrix}$ und $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$, so erhält man

$$\dot{X}(t) = AX(t) + G.$$

B. Abriß der allgemeinen Theorie und didaktische Analyse

Durch die Einführung einer einheitlichen Bezeichnungsweise erhält man also in den hier zitierten 4 Beispielen jeweils ein System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, das sich in Matrizen- bzw. Vektorschreibweise in der Form

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t) \text{ oder kurz } \dot{X} = AX + F$$

schreiben läßt, wobei $A(t)$ die (im allgemeinen zeitabhängige) Koeffizientenmatrix und $F(t)$ die (ebenfalls zeitabhängige) "Störfunktion" bezeichnet.

Wir geben nun im Folgenden einen Überblick über die Auflösungstheorie dieser linearen System, wei sie sich unter Verwendung der Theorie der kanonischen Formen von linearen Operatoren geradezu von selbst aufdrängt. Die Tatsache, daß sich hier Methoden der klassischen Analysis mit relativ modernen Betrachtungsweisen bzw. Methoden der Linearen Algebra in harmonischer Weise zur Bewältigung eines mathematischen Problemkreises zusammenfinden, die Tatsache also, daß sich hier die Inhalte der zwei wichtigsten Einführungsvorlesungen des Universitätsstudiums wechselseitig durchdringen, ist in letzter Zeit als didaktisch äußerst signifikant erkannt worden. Das Problem der Lehre auf dem Gebiet der Linearen Algebra liegt ja zum Teil im sehr hohen Abstraktionsniveau und dem Mangel an anwendungsorientierter Perspektive, das Problem der Lehre der Analysis andererseits in den begrifflichen Schwierigkeiten, die der Konvergenzbegriff in seinen vielfältigen Ausformungen schafft. Selbst für einen Studenten, der beide Vorlesungen resorbiert hat, ist es ein qualitativ neues Erlebnis, etwa die Exponentialfunktion einer Matrix, also die Konvergenz einer Matrizenreihe, demonstriert zu bekommen. Aus diesen und ähnlichen Gründen hat auch die Deutsche Mathematikervereinigung in ihrem 1979 fertig gestellten Memorandum zur Ausbildung von Lehramtskandidaten in Mathematik auf die Bedeutung dieses Teilgebietes hingewiesen [3]. Es soll nun der Versuch unternommen werden, die Theorie der Auflösung linearer Differentialgleichungssysteme in systematischer Weise zu skizzieren - als Grundlage dazu diene etwa Kapitel II meines Skriptums "Gewöhnliche Differentialgleichungen" [5] - und die jeweils auftretenden didaktischen Bezüge kurz zu analysieren. Zum Abschluß werden dann die oben gestellten Aufgaben vollständig gelöst.

SÄTZE UND DEFINITIONEN | DIDAKTISCHE BEZÜGE

§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Lösungen

Es sei also (*) $\dot{X} = AX + F$ ein allgemeines System von linearen DGn. Falls $F = 0$ heißt das System homogen, sonst inhomogen. Unter einer Lösung verstehen wir eine Vektorfunktion $X = X(t)$ mit stetiger Ableitung $\dot{X} = \dot{X}(t)$, die auf einem Intervall $a \leq t \leq b$ $(a < b)$ dem System genügt, wobei $A(t)$ und $F(t)$ auf dem Intervall stetig vorausgesetzt sind. Der folgende Satz ist natürlich der Spezialfall des allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für DGn. Es ist der einzige Satz, auf dessen Beweis im Rahmen von Einführungsvorlesungen verzichtet werden sollte. In allen "konkreten" Fällen wird die Lösung ja direkt erarbeitet.

(1.1) SATZ Sei $t_o \in [a,b]$ und sei $K = [k_1, \ldots, k_n]^\tau$ (τ = Transponierte Matrix) ein beliebiger Vektor. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $X(t)$ auf $[a,b]$ mit $X(t_o) = K$, die Lösung des Systems (*) ist.

§ 3. Inhomogene Systeme

Für inhomogene Systeme $\dot{X}=AX+F$ gilt:

(1.7) PROPOSITION. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\dot{X}=AX+F$ ist die Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems durch algebraische Manipulation erhältlich; vollkommene Analogie zu den Systemen gewöhnlicher linearer Gleichungen.

§ 4. Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $\dot{X}(t)=AX(t)$ ein autonomes lineares homogenes System (d.h. A ist konstant). Als Lösungsansatz verwendet man hier $X(t)=e^{rt}L$; dabei sind r und $L=[l_1,\dots,l_n]^T$ zu bestimmen. Es ist $\dot{X}(t)=re^{rt}L$, also $re^{rt}L=A(e^{rt}L)$, d.h.

$$AL=rL.$$

Die nicht-trivialen Lösungen $L\neq 0$ sind also Eigenvektoren des linearen Operators $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, die zu bestimmenden Zahlen r Eigenwerte von A. Somit sind die Skalare r die Lösungen der Polynomgleichung $\Delta(x\,I-A)=0$, d.h. des charakteristischen Polynoms von A [4]. Für jeden Eigenwert r ergibt sich eine nicht-triviale Lösung ($L\neq 0$) von $AL=rL$ und daraus

$$X(t)=e^{rt}L$$

als Lösung.

Natürlich ergibt dieser Ansatz überhaupt nur dann Lösungen, wenn A Eigenwerte besitzt.

(1.8) SATZ Falls die Matrix A des homogenen Systems $\dot{X}=AX$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen von der Form $X(t)=e^{rt}L$, wo r ein Eigenwert, L ein zugehöriger Eigenvektor von A ist.

Verquickung von Matrizenkalkül und Differentiation von Vektorfunktionen. Ferner tauchen die folgenden Begriffe auf: Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit. Letztere entspricht dem Begriff der Entkoppelung von Systemen von Differentialgleichungen. Demonstration der "Nützlichkeit" eines rein algebraischen Begriffs.

§ 5. Komplexe Lösungen

Sei wieder A eine (konstante) reelle $n\times n$ Matrix und

$$\dot{Z}(t)=A\,Z(t)$$

aufzulösen, wobei $Z(t)=X(t)+i\,Y(t)$ eine komplexe Vektorfunktion ist. Dann gilt $(X(t)+i\,Y(t))^{\cdot}=A(X(t)+i\,Y(t))$, also

$$\dot{X}(t)=A\,X(t) \text{ und } \dot{Y}(t)=A\,Y(t).$$

Daher sind sowohl X(t) (Realteil) als auch Y(t) (Imaginärteil) Lösungen des homogenen Systems. Allgemeiner gilt: Ist $Z(t)=X(t)+i\,Y(t)$ eine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{Z}(t)=A\,Z(t)+F(t),$$

wo $F(t)=G(t)+i\,H(t)$, dann sind X(t) bzw. Y(t) (reelle) Lösungen der Systeme

$$\dot{X}(t)=A\,X(t)+G(t),\ \dot{Y}(t)=A\,Y(t)+H(t).$$

(1.9) SATZ Falls eine reelle Matrix A eines homogenen Systems $\dot{X}=AX$ zu einer komplexen Diagonalmatrix ähnlich ist, existiert ein Fundamentalsystem von 2p Lösungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} X^*(t)=e^{rt}[\cos(st)L-\sin(st)M] \\ Y^*(t)=e^{rt}[\sin(st)L+\cos(st)M] \end{array}\right] \text{ bzw.}$$

und von n-2p Lösungen der Form $X(t)=e^{rt}L$ $(r,s\in\mathbb{R})$.
Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Diagonalisierbarkeit

Komplexifizierung von Vektorräumen, Frage der Existenz von Eigenwerten. Hier wird der Übergang zu einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper ausgenützt (allgemein anwendbare Methode der höheren Algebra), rein algebraische Charakterisierbarkeit des Begriffes "diagonalisierbar" möglich.

ist die, daß das Minimalpolynom von A in Faktoren ersten Grades zerfällt, [LA,p.98].

§ 6. Die Exponentialfunktion

Um auch im Falle nicht-diagonalisierbarer Operatoren A(in $\dot{X}=AX$) ein Fundamentalsystem von Lösungen bestimmen zu können, und auch zur allgemeinen Auflösung inhomogener Systeme, benötigt man eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Es ist dies die Funktion

$$\exp: M_n(K) \to M_n(K) \text{(wo } K=\mathbb{R},\mathbb{C})$$

definiert durch die Reihe

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (A^0 = I).$$

Die auftretenden Potenzen A^k sind dabei die assoziativen Produkte A A ... (k mal) der Matrix A. ($M_n(K)$ = $n \times n$ Matrizen über K).

(1.10) SATZ. Für jedes $A \in M_n(K)$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ absolut konvergent in bezug auf die Norm $\|A\| = \max\{|A_{ij}| \mid 1 \le i,j \le n\}$. Exp hat die folgenden Eigenschaften:
(1) $\exp(A+B) = \exp A \exp B$, falls $AB=BA$;
(2) $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$;
(3) Ist $A=A(t)$ eine differenzierbare Funktion von t, dann ist auch $\exp A(t)$ differenzierbar, und es gilt
$(\exp A(t))^{\cdot} = A^{\cdot}(t) \exp A(t)$, falls
$A(t)A^{\cdot}(t) = A^{\cdot}(t)A(t) (\forall t)$.
(4) $\Delta(\exp A) = e^{\mathrm{Sp}\,A}$;
(5) Für jede invertierbare Matrix P gilt
$\exp(P A P^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$.

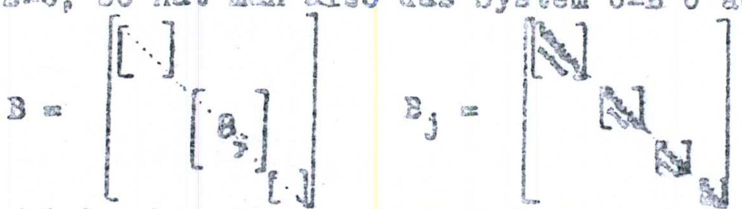
(Absolute) Konvergenz sowie Divergenz von Vektor- und Matrizenreihen, Differentiation von Vektor- und Matrizenfunktionen, Darstellung eines linearen Operators, Konjugation in der allgemeinen linearen Gruppe Nicht-Kommutativität von Operatoren, Auftreten von 1-Parameter-Untergruppen in Matrizen-Gruppen.

§ 7. Auflösung homogener Systeme

Ein Fundamentalsystem kann auch rechnerisch bestimmt werden, falls A konstant ist. Sei $\dot{X}=AX$ aufzulösen. Im allgemeinen existiert für die reelle Matrix A keine Jordansche Normalform (im engeren Sinn). Da wir aber davon Gebrauch machen wollen, fassen wir A als komplexe Matrix auf, betrachten also das System $\dot{Z}=AZ$. Sei B die Jordansche Normalform von A; dann existiert eine invertierbare $n \times n$-Matrix P, derart daß $P^{-1}AP=B$. Also gilt:

$$(P^{-1}Z)^{\cdot} = P^{-1}\dot{Z} = P^{-1}AZ = (P^{-1}AP)(P^{-1}Z) = B(P^{-1}Z).$$

Setzt man $P^{-1}Z=U$, so hat man also das System $\dot{U}=B\,U$ aufzulösen. Dabei hat B die Form



wo jeder "Block" direkte Summe von Teilblöcken absteigender Größe ist, die auf der Hauptdiagonalen die Eigenwerte von A bzw. B und darunter nur Einser aufweisen. Zerlegt man die Teilblöcke und wendet die Exponentialfunktion an, so ergeben sich die Lösungen für $\dot{U}=B\,U$ und daraus durch Rückrechnung jene für $\dot{Z}=AZ$.

Für $\dot{Z}=AZ$ erhalten wir daraus folgendes Resultat:

(1.11) SATZ. Das homogene komplexe System $\dot{Z}=AZ$ besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form $Z(t)=e^{At}K$, wo K ein verall-

Die hier vorgenommene Transformation zeigt die Macht der Methoden der linearen Algebra; durch einfache Matrizenmanipulation erhält man ein Äquiva-

gemeinerter Eigenvektor von A ist.
$\bar{Z}$ kann durch den Ansatz

$$Z(t)=e^{c_j t}[K+t(A-c_jI)K+\dots+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(A-c_jI)^{s-1}K]$$

gefunden werden (wo K zu c_j gehört).

(1.12) SATZ Das homogene System $\dot{X}=AX$ besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$X^*(t)=\frac{1}{2}(Z(t)+\bar{Z}(t)),$$
$$Y^*(t)=\frac{1}{2i}(Z(t)-\bar{Z}(t)),$$

wo

$$Z(t)=e^{c_j t}[K+t(A-c_jI)K+\dots+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(A-c_jI)^{s-1}K],$$

K ein zu c_j gehöriger verallgemeinerter Eigenvektor, sowie Lösungen der Form

$$X(t)=e^{r_j t}[K+t(A-r_jI)K+\dots+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(A-r_jI)^{s-1}K],$$

K ein zu r_j gehöriger verallgemeinerter Eigenvektor.

lentes System von DGn mit einer Koeffizientenmatrix, deren Form als kanonisch angenommen werden kann. Bezugnahme auf Primärzerlegung. Jordansche Normalform, verallgemeinerte Eigenvektoren. Nilpotenz von Operatoren. Die Beweise von (1.11) und (1.12) enthalten viele Matrizenmanipulationen, gründliche Einübung von Methoden der linearen Algebra.

§ 8. Inhomogene Systeme. Variation der Parameter

Unter der Voraussetzung, daß $A(t)\dot{A}(t)=\dot{A}(t)A(t)$ sei

$$\dot{X}(t)=\dot{A}(t)X(t)+F(t)$$

zu lösen. Ein Fundamentalsystem von Lösungen von $\dot{X}(t)=\dot{A}(t)X(t)$ ist z.B. $\mathcal{X}(t)K$, K ein konstanter Vektor, $\mathcal{X}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem. Wir versuchen K als Funktion von t so zu bestimmen, daß $X_p(t)=\mathcal{X}(t)K(t)$ eine (partikuläre) Lösung des inhomogenen Systems wird:

$$\dot{X}_p(t)=\dot{\mathcal{X}}(t)K(t)+\mathcal{X}(t)\dot{K}(t)=\dot{A}(t)\mathcal{X}(t)K(t)+F(t).$$

Da $\dot{\mathcal{X}}(t)L=\dot{A}(t)\mathcal{X}(t)L$ für jeden Vektor L, gilt auch $\dot{\mathcal{X}}(t)K(t)=\dot{A}(t)\mathcal{X}(t)K(t)$; es muß also zusätzlich

$$\mathcal{X}(t)\dot{K}(t)=F(t)$$

gelten; also ist $\dot{K}(t)=\mathcal{X}(t)^{-1}F(t)$, und

$$K(t)=\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}(s)^{-1}F(s)ds, \text{ d.h.}$$

$$X_p(t)=\mathcal{X}(t)K(t)=\mathcal{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}(s)^{-1}F(s)ds.$$

Daraus erhalten wir als allgemeine Lösung

$$Y(t)=\mathcal{X}(t)L+\mathcal{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}(s)^{-1}F(s)ds$$

(L konstant)
Es ist $Y(t_0)=\mathcal{X}(t_0)L$, also $L=\mathcal{X}(t_0)^{-1}Y(t_0)$. Daher kann die allgemeine Lösung in der Form

$$Y(t)=\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t_0)^{-1}Y(t_0)+\mathcal{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathcal{X}(s)^{-1}F(s)ds$$

geschrieben werden, wo $\mathcal{X}(t)$ eine fundamentale Lösungsmatrix des homogenen Systems ist. Für $\mathcal{X}(t)=e^{A(t)}$ ergibt sich die spezielle Form

$$Y(t)=e^{A(t)-A(t_0)}Y(t_0)+e^{A(t)}\int_{t_0}^{t}e^{-A(s)}F(s)ds.$$

Für das System $\dot{X}=AX+F$, wo A konstant ist, bedeutet das

$$Y(t)=e^{A(t-t_0)}Y(t_0)+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-As}F(s)ds.$$

Diese Formel ist das Analogon der Auflösungsformel für eine lineare DG in einer einzigen Variablen. Ansatzpunkt für eine Verallgemeinerung der Theorie (siehe § 9): Häufige Differentiation, aber auch Integration von Vektorfunktionen.

Es sei $\mathfrak{X}(t) = e^{At}$ das oben gewonnene Fundamentalsystem von Lösungen von $\dot X = AX$ und es sei $\mathfrak{Y}(t) = [Y_1(t),\dots,Y_n(t)]$ irgendeines. Da die Matrizen $\mathfrak{Y}(t)$ und $\mathfrak{X}(t)$ den gleichen Rang (nämlich n) haben, gilt $\mathfrak{Y}(t) = K\mathfrak{X}(t)$, wo K invertierbar ist. Dann ist $\mathfrak{Y}(0) = K\mathfrak{X}(0)$; da $\mathfrak{X}(0) = e^{0t} = I$, folgt $K = \mathfrak{Y}(0)$, also $\mathfrak{Y}(t)\mathfrak{Y}(0)^{-1} = \mathfrak{X}(t)$:

(1.13) PROPOSITION Ist $\mathfrak{Y}(t) = [Y_1(t),\dots,Y_n]$ irgendein Fundamentalsystem von Lösungen von $\dot X = AX$, so ist
$$e^A = \mathfrak{Y}(1)\mathfrak{Y}(0)^{-1}.$$
Das ergibt die angekündigte Methode, e^A direkt zu berechnen.

Exponentialfunktion einer Matrix durch Anwendung analytischer Methoden errechnet, Spießumkehr.

§ 9. Ein Vorschlag

Es besteht die Möglichkeit, durch Betrachtung einer Matrizen-DG anstelle einer Vektor- und Matrizen-DG die Analogie zum eindimensionalen Fall zu vervollkommnen. Anstelle von $\dot X = AX+F$ betrachten wir die DG (**) $\dot{\mathfrak{X}} = A\mathfrak{X} + \mathfrak{F}$, wo A konstant ist,

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t)\dots x_{1n}(t) \\ \\ x_{n1}(t)\dots x_{nn}(t) \end{bmatrix} = [X_1(t),\dots,X_n(t)]$$

und $\mathfrak{F}(t) = [F_1(t),\dots,F_n(t)]$. Diese DG ist äquivalent mit den n Vektor-Matrizen DGn $\dot X_j = AX_j + F_j$ $(1 \le j \le n)$; es treten also n verschiedene Störfunktionen auf. Unter einer Lösung von (**) verstehen wir selbstverständlich eine differenzierbare Matrizenfunktion $\mathfrak{X}(t)$ auf $[a,b]$. Falls $A\dot A = \dot A A$, ist also gemäß dem obigen die Funktion $\mathfrak{U}(t) = e^{A(t)}$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{\mathfrak{U}} = \dot A\mathfrak{U}$ und gemäß (1.10)(4) existiert $\mathfrak{U}^{-1}$. Sei $\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{U}(t)\mathfrak{B}(t)$ ein Lösungsansatz, d.h. $\mathfrak{B}(t)$ zu bestimmen. Dann gilt $\dot{\mathfrak{U}}\mathfrak{B} + \mathfrak{U}\dot{\mathfrak{B}} = A\,\mathfrak{U}\mathfrak{B} + \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{U}\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{F}$, da $\dot{\mathfrak{U}} = A\mathfrak{U}$. Somit ist $\dot{\mathfrak{B}} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{F}$, also

$$\mathfrak{B}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{U}^{-1}(s)\mathfrak{F}(s)ds + \mathfrak{C} = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{U}^{-1}(s)\mathfrak{F}(s)ds + \mathfrak{C}.$$

Durch Differentiation bestätigt man, daß die Matrix

$$\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{U}(t)\mathfrak{C} + \mathfrak{U}(t) \int_{t_0}^{t} \mathfrak{U}^{-1}(s)\mathfrak{F}(s)ds$$

eine Lösung von (**) darstellt.

Für $t = t_0$ ergibt sich $\mathfrak{C} = \mathfrak{U}^{-1}(t_0)\mathfrak{X}(t_0)$ und daraus

$$\mathfrak{X}(t) = \mathfrak{U}(t)\mathfrak{U}^{-1}(t_0)\mathfrak{X}(t_0) + \mathfrak{U}(t) \int_{t_0}^{t} \mathfrak{U}^{-1}(s)\mathfrak{F}(s)ds$$

als allgemeine Lösung, die speziell für $\mathfrak{U}(t) = e^{A(t)}$ die Form

$$\mathfrak{X}(t) = e^{A(t)-A(t_0)}\mathfrak{X}(t_0) + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\mathfrak{F}(s)ds$$

annimmt. Letztere Formel ist das genaue Analogon zur Auflösungsformel im eindimensionalen Fall:

$$\dot y = \mathfrak{a}(t)y + \mathfrak{b}(t)$$

hat ja bekanntlich die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{m(t)-m(t_o)}\, y(t_o) + e^{m(t)} \int_{t_o}^{t} e^{-m(s)} n(s)ds.$$

Die zuletzt entwickelte Methode hat den großen Vorteil, allgemeiner zu sein, als die in § 8 skizzierte, zugleich ist sie insofern einfacher, als die in den früheren Formeln auftretenden Eigenvektoren verschwinden. Grundlage des Ganzen ist, wie aus der Herleitung klar ersichtlich, ein Matrizenkalkül, der die obigen Operationen der Linearen Algebra zusammen mit Differentiation und Integration benützt. Die so erhaltene Lösung ergibt durch Spezialisierung auf einzelne Spalten die in § 8 hergeleiteten Lösungsformeln.

Abschließend sei folgendes vermerkt: Lineare DGn höherer Ordnung,

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_o(t)y = f(t),$$

lassen sich durch eine einfache Transformation,

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},\ x_3 = \ddot{y}, \ldots, x_n = y^{(n-1)},$$

in lösungsäquivalente Systeme von n linearen DGn verwandeln. Da einige der wichtigsten DGn der Physik in diese Kategorie fallen, kann die hier skizzierte Theorie auf diese physikalischen Probleme angewendet werden.

C. Lösungen

Die oben skizzierte Theorie wird nun zur vollständigen Auflösung der eingangs zitierten Beispiele verwendet; für den Leser wird es auch ohne genaue Bezugnahme auf die zitierten Methoden leicht sein, dem Lösungsgang zu folgen.

EX I

Es ist

$$\Delta(xI - A) = \Delta\begin{bmatrix} x+200 & 200 \\ 200 & x+500 \end{bmatrix} = (x+200)(x+500) - 4000 = x^2 + 700x + 6000 =$$
$$= (x+100)(x+600),$$

also sind $x = -100$, $x = -600$ die Eigenwerte von A.

Dazu gehören die linearen Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{matrix} 100l_1 + 200l_2 = 0 \\ 200l_1 + 400l_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ bzw. } \left\{\begin{matrix} -400l_1 + 200l_2 = 0 \\ 200l_1 - 100l_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Die Lösungen sind $l_1 = -2l_2$ bzw. $l_1 = \frac{1}{2}l_2$. Somit resultieren

$$X(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-100t} \\ e^{-100t} \end{bmatrix} \text{ bzw. } Y(t) = \begin{bmatrix} e^{-600t} \\ 2e^{-600t} \end{bmatrix}$$

als Lösungen des homogenen System $\dot{X} = AX$. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist somit

$$X(t) = \begin{bmatrix} -2c_1e^{-100t} + c_2e^{-600t} \\ c_1e^{-100t} + 2c_2e^{-600t} \end{bmatrix}, \text{ wo } c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \text{ aus } x_1(0) = x_2(0) = 0 \text{ folgt } c_1 = c_2 = 0.$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung X_p von $\dot{X} = AX + F$ verwenden wir die Formel

$$X_p(t) = \mathfrak{X}(t) \int_0^t \mathfrak{X}(s)^{-1} F \, ds, \text{ wobei } \mathfrak{X}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-100t} & e^{-600t} \\ e^{-100t} & 2e^{-600t} \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$\mathfrak{X}(s)^{-1} = -\frac{1}{5}e^{700s} \begin{bmatrix} 2e^{-600s} & - e^{-600s} \\ e^{-100s} & -2e^{-100s} \end{bmatrix}.$$

Weiters

$$\mathfrak{X}(s)^{-1}F = -\frac{1}{5}e^{700s} \begin{bmatrix} 2e^{-600s} & - e^{-600s} \\ -e^{-100s} & -2e^{-100s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 3000 \end{bmatrix} = -600 \begin{bmatrix} e^{100s} \\ -e^{600s} \end{bmatrix}.$$ Und daher ist

$$\int_0^t \mathfrak{X}(s)^{-1}F \, ds = -600 \int_0^t \begin{bmatrix} e^{100s} \\ -e^{600s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} -6e^{100t} + 6 \\ e^{600t} - 1 \end{bmatrix}.$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir somit:

$$X_p(t) = \mathfrak{X}(t) \int_0^t \mathfrak{X}(s)^{-1}F \, ds = \begin{bmatrix} -2e^{-100t} & e^{-600t} \\ e^{-100t} & 2e^{-600t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{100t} + 6 \\ e^{600t} - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -12e^{-100t} - e^{-600t} + 13 \\ 6e^{-100t} - 2e^{-600t} - 4 \end{bmatrix}.$$

Als Lösung des inhomogenen Systems $\dot{X} = AX + F$ erhalten wir somit

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12e^{-100t} - e^{-600t} + 13 \\ 6e^{-100t} - 2e^{-600t} - 4 \end{bmatrix}.$$

EX II

Es gilt $\Delta[xI - A] = x(x+1)^3$, also sind die Eigenwerte von A $x = 0$, $x = -1$, $x = -1$, $x = -1$; also ist -1 ein Eigenwert der Vielfachheit 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Also ist } X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eine Lösung.}$$

Die Eigenvektoren K zum Eigenwert -1 von A genügen der Gleichung

$$(A+I)K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 \\ k_2 + k_4 \\ -k_1 + k_2 - k_3 + k_4 \\ k_1 - k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das ergibt $k_1 = -k_3$, $k_2 = 0$, $k_4 = 0$. Also ist

$$X_2(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eine Lösung.}$$

Weitere Eigenvektoren zum Eigenwert -1 gibt es nicht. Wir bestimmen daher die verallgemeinerten Eigenvektoren, zunächst Lösungen K von $(A + I)^2 K = 0$, für die $(A + I)K \neq 0$ gilt:

$$(A+I)^2 K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 + k_4 \\ k_1 + k_3 + k_4 \\ k_1 - k_2 + k_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

das ergibt $k_2 = -k_4$, $k_1 = k_2 - k_3$. Der Vektor $K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ erfüllt $(A+I)^2 K = 0$,

aber $(A+I)K \neq 0$. Daher ist eine dritte Lösung folgendermaßen zu finden:

$$X_3(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} e^{(A+I)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} [I + t(A+I)] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-t} [I + t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \\ -t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wir suchen uns eine Lösung der Gleichung $(A+I)^3 K = 0$ mit $(A+I)^2 K \neq 0$.

$$(A+I)^3 K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 + k_4 \\ k_1 + k_3 + k_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

das ergibt $k_1 = -k_3 - k_4$. Der Vektor $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ erfüllt $(A+I)^3 K = 0$, aber $(A+I)^2 K \neq 0$.

Daher findet man eine vierte Lösung wie folgt:

$$X_4(t) = e^{At}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix} = e^{-t}\, e^{(A+I)t}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix} = e^{-t}\left[I+t(A+I)+\frac{t^2}{2}(A+I)^2\right]\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}-t-2\\ t\\ \frac{t^2}{2}+2t+1\\ -t+1\end{bmatrix}.$$ Insgesamt erhlaten wir als Lösung

$$X(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} c_1+c_2+c_2t+c_3\frac{t^2}{2}-c_3t-2c_3\\ c_2+c_3t\\ -c_1-c_2t-c_3\frac{t^2}{2}+2c_3t+c_3\\ -c_2-c_3t+c_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_4\\c_4\\0\\0\end{bmatrix},$$ wobei $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$.

Literatur: L. Collatz, Differentialgleichungen, Teubner, 1960, Seite 100.

<u>EX III</u>

Zunächst löst man das homogene System $\dot{X} = AX$. Dabei setzen wir $\alpha = \frac{m_1+m_3}{2}$, $\omega_0^2 = m_1m_3+m_2m_4$ und erhalten für $\Delta[xI-A] = \begin{bmatrix}x+m_1 & m_2\\ -m_4 & x+m_3\end{bmatrix} = x^2+2\alpha x+\omega_0^2 = 0$ die Lösungen $x=-\alpha+i\omega$, $x=-\alpha-i\omega$, dabei haben wir $\omega^2 = \omega_0^2-\alpha^2$ gesetzt unter der Voraussetzung, daß $\alpha^2-\omega_0^2 < 0$.

Für $x=-\alpha+i\omega$ ist $L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}$ so zu bestimmen, daß

$$[(-\alpha+i\omega)I-A]L = \begin{bmatrix}-\alpha+i\omega+m_1 & m_2\\ -m_4 & -\alpha+i\omega+m_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$ Für L erhält man

$$L = \begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{m_4}+i\frac{\omega}{m_4}\\ 1\end{bmatrix}.$$ Also ist $Z(t) = e^{(-\alpha+i\omega)t}\begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{m_4}+i\frac{\omega}{m_4}\\ 1\end{bmatrix}$ die zu $-\alpha+i\omega$ gehörige Lösung,

nun ist

$$X^*(t)+iY^*(t) = Z(t) = e^{(-\alpha+i\omega)t}\begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{m_4}+i\frac{\omega}{m_4}\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$= e^{-\alpha t}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\left[\begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{m_4}\\ 1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}\frac{\omega}{m_4}\\ 0\end{bmatrix}\right] =$$

$$= e^{-\alpha t}\left(\cos\omega t\begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{2}\\ m_4\\ 1\end{bmatrix} - \sin\omega t\begin{bmatrix}\frac{\omega}{m_4}\\ \\ 0\end{bmatrix}\right) + ie^{-\alpha t}\left(\cos\omega t\begin{bmatrix}\frac{\omega}{m_4}\\ \\ 0\end{bmatrix} + \sin\omega t\begin{bmatrix}\frac{m_3-\alpha}{2}\\ m_4\\ 1\end{bmatrix}\right),$$

so daß

$$X^*(t) = e^{-\alpha t}\begin{bmatrix}\frac{\frac{m_3-\alpha}{2}}{m_4}\cos\omega t - \frac{\omega}{m_4}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{bmatrix},\quad Y^*(t) = e^{-\alpha t}\begin{bmatrix}\frac{\omega}{m_4}\cos\omega t + \frac{\frac{m_3-\alpha}{2}}{m_4}\sin\omega t\\ \sin\omega t\end{bmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems $\dot{X} = AX$ sind. Um das inhomogene System $\dot{X} = AX + F$ zu lösen, setzt man

$$X(t) = e^{-\alpha t}\begin{bmatrix}\frac{\frac{m_3-\alpha}{2}}{m_4}\cos\omega t - \frac{\omega}{m_4}\sin\omega t & \frac{\omega}{m_4}\cos\omega t + \frac{\frac{m_3-\alpha}{2}}{m_4}\sin\omega t\\ \cos\omega t & \sin\omega t\end{bmatrix}$$

und erhält eine partikuläre Lösung X_p nach der Formel

$$X_p(t) = X(t)\int_0^t X(s)^{-1}F(s)ds.$$

Daraus erhalten wir als allgemeine Lösung

$$Y(t) = X(t)L + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}F(s)ds \quad (L \text{ konstant}).$$

Die in den Lösungen auftretenden Konstanten können durch vier Messungen zu den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 und t_4 bestimmt werden. Dazu kann die Methode des kleinsten quadratischen Fehlers verwendet werden, wofür ein vollständiges Fortran-Programm entwickelt wurde. Auf diese Art und Weise erhält man schließlich die für die Diagnose von Zuckerkrankheit wichtige Abweichung g der Glukose-Konzentration von ihrem optimalen Wert G_0.

Literatur: M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Applied Mathematical Sciences 15, Springer Verlag 1975, Seite 257 - 269.

EX IV

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\Delta(xI-A) = (x+\alpha)^3 - 3k^2(x+\alpha) - 2k^3$$

$x = -\alpha - k$ ist eine Lösung von $\Delta(xI-A) = 0$, $x = -\alpha - k$, $x = -\alpha + 2k$ die weiteren. Somit hat ein Eigenwert die Vielfachheit 2.
Als erste Lösung zum Eigenwert $-\alpha + 2k$ erhalten wir:
$X_1(t) = e^{(-\alpha+2k)t}L$, wobei L durch $((-\alpha+2k)I-A)L = 0$ bestimmt wird:

$$\begin{bmatrix}2k & -k & -k\\ -k & 2k & -k\\ -k & -k & 2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2kl_1 - kl_2 - kl_3\\ -kl_1 + 2kl_2 - kl_3\\ -kl_1 - kl_2 + 2kl_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix};$$

für L ergibt das $L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, somit ist eine erste Lösung $X_1(t) = e^{(-\alpha+2k)t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Für den Eigenwert $-\alpha - k$ erhalten wir aus

$$((-\alpha - k)I-A)L = \begin{bmatrix} -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zwei linear unabhängige Lösungen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für L und somit zwei weitere linear unabhängie Lösungen des homogenen Systems

$$X_2(t) = e^{(-\alpha-k)t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_3(t) = e^{(-\alpha-k)t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems erhalten wir mit Hilfe der Formel

$$X_p(t) = X(t)\int_0^t X(s)^{-1} G \, ds, \text{ wobei}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t} & e^{(-\alpha-k)t} & 0 \\ e^{(-\alpha+2k)t} & -e^{(-\alpha-k)t} & -e^{(-\alpha-k)t} \\ e^{(-\alpha+2k)t} & 0 & e^{(-\alpha-k)t} \end{bmatrix}; \text{ wir berechnen}$$

$$X(s)^{-1} = -\frac{1}{3}\, e^{3\alpha s}\begin{bmatrix} -e^{(-2\alpha-2k)s} & -e^{(-2\alpha-2k)s} & -e^{(-2\alpha-2k)s} \\ -2e^{(-2\alpha+k)s} & e^{(-2\alpha+k)s} & e^{(-2\alpha+k)s} \\ e^{(-2\alpha+k)s} & e^{(-2\alpha+k)s} & -2e^{(-2\alpha+k)s} \end{bmatrix}; \text{ somit erhalten wir}$$

$$X_p(t) = X(t)\int_0^t \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} -g_1e^{(\alpha-2k)s} - g_2e^{(\alpha-2k)s} - g_3e^{(\alpha-2k)s} \\ -2g_1e^{(\alpha+k)s} + g_2e^{(\alpha+k)s} + g_3e^{(\alpha+k)s} \\ g_1e^{(\alpha+k)s} + g_2e^{(\alpha+k)s} - 2g_3e^{(\alpha+k)s} \end{bmatrix} ds =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} e^{(-\alpha+2k)t} & e^{(-\alpha-k)t} & 0 \\ e^{(-\alpha+2k)t} & -e^{(-\alpha-k)t} & -e^{(-\alpha-k)t} \\ e^{(-\alpha+2k)t} & 0 & e^{(-\alpha-k)t} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{g_1}{\alpha-2k} e^{(\alpha-2k)t} - \frac{g_2}{\alpha-2k} e^{(\alpha-2k)t} - \frac{g_3}{\alpha-2k} e^{(\alpha-2k)t} + \frac{1}{\alpha-2k}(g_1+g_2+g_3) \\ -\frac{2g_1}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} + \frac{g_2}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} + \frac{g_3}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} + \frac{1}{\alpha+k}(g_1+g_2+g_3) \\ \frac{g_1}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} + \frac{g_2}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} - \frac{2g_3}{\alpha+k} e^{(\alpha+k)t} + \frac{1}{\alpha+k}(g_1+g_2+g_3) \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

Als allgemeine Lösung erhält man somit $Y(t) = \Phi(t)L + X_p(t)$, wobei L konstant ist.
Für die Friedensforschung interessant ist die Frage der Stabilität der Lösungen $Y(t)$, d.h. ob sich eine weitere Lösung $\tilde{Y}(t)$, die für $t=0$ von $Y(t)$ nur wenig abweicht, auch für alle $t \geq 0$ so verhält.

Aus der Formel $*$ ist ersichtlich, daß für $2k<\alpha$ jede Lösung stabil ist, für den Fall $2k>\alpha$ jede Lösung aber instabil ist, was Kriegsgefahr bedeutet.

Dieses Bild ändert sich deutlich, wenn man etwa voraussetzt, daß eine der drei Nationen ein Pazifist ist, die beiden anderen jedoch nicht; dies führt auf das System

$$\left\{\begin{matrix} \dot{x}_1(t) = -\alpha\, x_1(t) + k\, x_2(t) + k\, x_3(t) + g_1 \\ \dot{x}_2(t) = k\, x_1(t) - \alpha\, x_2(t) + k\, x_3(t) + g_2 \\ \dot{x}_3(t) = 0.x_1(t) + 0.x_2(t) - \alpha\, x_3(t) + g_3 \end{matrix}\right\}.$$

Hier ist jede Lösung stabil, falls $k<\alpha$ und instabil, falls $k>\alpha$.

Literatur: M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Applied Mathematical Sciences 15, Springer Verlag 1975, Seite 513 - 525.

D. LITERATUR

[1] M. Braun: Differential Equations and Their Applications, Applied Mathematical Sciences 15, Springer Verlag 1975.

[2] L. Collatz: Differentialgleichungen, Teubner, 1960.

[3] Deutsche Mathematikervereinigung: Denkschrift zur Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik, Freiburg, 1979.

[4] S. Großer: Lineare Algebra I & II, Skriptum zur Vorlesung, Institut für Mathematik der Universität, Wien, 1978.

[5] S. Großer: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Skriptum zur Vorlesung, Hochschülerschaft an der Universität Wien, Wirtschaftsbetriebsgesellschaft m.b.H., Wien, 1979.

Für seine Hilfe bei der Literatur- und Beispielsuche danke ich Herrn Dr. F. Haslinger.

Institut für Mathematik
der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien